Corso “Matematica Discreta”
Anno accademico 2014-2015

Lista domande per l’orale breve.

1. Dimostrare una delle leggi che coinvolgono l’intersezione, l’unione, il complementare (associativa, distributiva o leggi di De Morgan) (la legge viene scelta dalla commissione).
2. Fare una semplice dimostrazione per induzione scelta dalla commissione.
3. Risolvere un esercizio del tipo: trovare tutti i numeri naturali n per cui vale $2^n \geq n^3 + n^2 + 2$ (motivare la risposta).
4. Fare una dimostrazione in cui si usa il principio del minimo.
5. Definire la successione di Fibonacci e dare una formula compatta per i numeri di Fibonacci. Spiegare.
6. Saper spiegare il metodo per (provare a) trovare una formula compatta per una successione definita per ricorrenza lineare e a coefficienti costanti.
7. Dare le definizioni di funzione iniettiva, surgettiva, bigettiva e spiegare l’enunciato del principio dei cassetti.
8. Date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, è vero o falso che $g \circ f$ iniettiva implica f iniettiva? È vero o falso che $g \circ f$ iniettiva implica g iniettiva? Spiegare.
9. Date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, è vero o falso che $g \circ f$ surgettiva implica f surgettiva? È vero o falso che $g \circ f$ surgettiva implica g surgettiva? Spiegare.
10. Dato un insieme X di cardinalità n e un insieme Y di cardinalità m, quante sono le funzioni da X a Y? E quante sono le funzioni iniettive da X a Y? (Considerare i casi $n > m$ e $n \leq m$). Spiegare.
11. Dato un insieme finito X di cardinalità $n \geq 0$, qual è la cardinalità del suo insieme delle parti? Spiegare.
12. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $0 \leq r \leq n$. Dare la definizione di $\binom{n}{r}$ e spiegare come mai $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$.
13. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $1 \leq r \leq n-1$. Dimostrare la formula
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$
14. Considerato il poker a 52 carte, saper contare quante sono le mani che contengono: un colore oppure una scala oppure nessun punto, oppure un poker oppoure un full, oppure un tris, oppure una doppia coppia, oppure una coppia.

15. Sia $n \in \mathbb{N}$. Quanto vale $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$? Spiegare.

16. Sia $n \in \mathbb{N}$. Quanto vale $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$? Spiegare.

17. Enunciare il principio di inclusione-esclusione e saperlo usare per risolvere semplici esercizi.

18. Formula per il numero di partizioni di un intero.

19. Numero di divisori di un intero.

20. Esercizio sul tipo: contare il numero di divisori di n che non sono né quadrati né cubi.

21. Siano $a, b, m \in \mathbb{Z}$, con $m \geq 1$. Esporre una condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione $ax \equiv b \mod m$ abbia soluzione e saper spiegare la motivazione.

22. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con a, b non entrambi nulli. Esporre una condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione diofantea $ax + by = c$ abbia soluzione e saper spiegare la motivazione.

23. Saper spiegare come mai l'equazione diofantea $ax + by = c$ o non ha soluzioni o ne ha infinite.

24. Enunciare e dimostrare il teorema di Bezout.

25. Siano $a, b, m \in \mathbb{Z}$, con $m \geq 1$. Spiegare come mai, se $d|a$ e $d|b$ allora l'equazione
$$ax \equiv b \mod m$$
equivale a
$$\frac{a}{d} x \equiv \frac{b}{d} \mod \frac{m}{MCD(d, m)}$$

26. Siano $a, b, m \in \mathbb{Z}$, con $m \geq 1$. Spiegare come mai, se k è un numero primo con m ,
$$ax \equiv b \mod m$$
equivale a
$$kax \equiv kb \mod m$$

27. Enunciare e dimostrare il teorema cinese del resto per due equazioni con moduli primi fra loro.

28. Se m_1, m_2 sono due numeri interi positivi primi fra loro, l'insieme delle soluzioni della congruenza
$$ax \equiv b \mod m_1 m_2$$
coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema dato dalle due equazioni
$$ax \equiv b \mod m_1$$
$$ax \equiv b \mod m_2$$
È vero o falso?

29. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con a, b non entrambi nulli. Spiegare come sono collegate le soluzioni della equazione diofantea $ax + by = c$ con le soluzioni della equazione $ax \equiv c \mod b$.

30. Dimostrare che i numeri primi sono infiniti.

31. È vero o falso che, dati due interi a, b non entrambi nulli, allora gli interi $a' = \frac{a}{MCD(a,b)}$ e $b' = \frac{b}{MCD(a,b)}$ sono primi fra loro ? Spiegare.

32. Spiegare l'algoritmo di Euclide e come mai funziona.

33. Spiegare i criteri di divisibilità per 3, per 11 e per 7 e come mai funzionano.

34. Dato un intero $m \geq 1$, esporre la definizione di 'classe di resto modulo m', spiegare cosa sono gli anelli $\mathbb{Z}_m$, e spiegare come mai $\mathbb{Z}_m$ è un campo se e solo se m è un numero primo.

35. Enunciare e dimostrare il 'piccolo teorema di Fermat'.

36. Risolvere un esercizio del tipo: $1244^{198764} \equiv ? \mod 13$. (Insomma trovare il minimo rappresentante non negativo della classe di resto.)

37. Spiegare come mai per ogni $a \in \mathbb{Z}$ vale $a^{561} \equiv a \mod 561$.

38. Spiegare come mai, in un gruppo finito G, la cardinalità di un sottogruppo divide la cardinalità di G. Applicare spiegando l'enunciato della forma generalizzata del piccolo teorema di Fermat.

39. Definizione di grado di un polinomio e sue proprietà rispetto alle operazioni.

40. Mostrare in che modo può essere fattorizzato in fattori di primo e secondo grado un polinomio in $\mathbb{C}[x]$ o in $\mathbb{R}[x]$, e definire la molteplicità di una sua radice.

41. Enunciare le formule che mettono in relazione radici e coefficienti di un polinomio (formule di Viète).

42. Enunciare e dimostrare il teorema delle radici razionali.

43. Saper mostrare che se λ è una radice di un polinomio in $\mathbb{R}[x]$, allora lo è anche $\bar{\lambda}$

44. Saper dare una formula per le radici n-esime di 1, e saperle disegnare sul piano complesso.

45. Risolvere un sistema lineare con l'eliminazione di Gauss e saper spiegare l'algoritmo.

46. Definizione di spazio vettoriale e sottospazio vettoriale. Saper verificare che un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è un sottospazio vettoriale.

47. Data una matrice A, saper verificare che $\ker A$ e $\operatorname{im} A$ sono sottospazi e saperne calcolare una base.

48. Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata. Saper spiegare l'algoritmo e saperlo applicare.

49. Definizione di insieme di generatori di uno spazio vettoriale, elementi linearmente indipendenti e base di uno spazio vettoriale.

50. Dimostrazione che ogni elemento di uno spazio vettoriale si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una base.

51. Dati k vettori in $\mathbb{K}^n$, saper dire se sono linearmente indipendenti oppure no (e spiegare l'algoritmo).

52. Come si estrae una base da un insieme di generatori: enunciato, dimostrazione, saper applicare a casi concreti.

53. Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità (dimostrazione).

54. Saper spiegare perché il numero di scalini di una matrice non dipende dalla riduzione a scala effettuata. Definizione di rango di una matrice.

55. Definizione di applicazione lineare. Saper verificare che una data funzione è lineare, o mostrare che non lo è.

56. Saper spiegare perché se due applicazioni lineari $T, S : V \to W$ coincidono su una base di V, allora sono uguali.

57. Definizione di matrice associata a un'applicazione lineare (secondo basi fissate). Saperla scrivere in un esempio esplicito.

58. Saper dimostrare la formula $B = V^{-1}AV$ per calcolare la matrice B associata a un'applicazione lineare rispetto a una base arbitraria (data quella nella base canonica A).

59. Dimostrazione della formula che lega dimensione del nucleo e dell'immagine di una matrice.

60. Proprietà delle matrici trasposte rispetto alle operazioni. Saper spiegare perché la dimensione dello spazio generato dalle colonne di una matrice è uguale a quella dello spazio generato dalle righe.

61. Spiegare come si trova un insieme di equazioni per un sottospazio (presentato tramite un insieme di generatori).

62. Spiegare come si calcola una base di $U + W$.

63. Spiegare come si calcola una base di $U \cap W$.

64. Saper enunciare i diversi modi per calcolare il determinante: formula con i cofattori (sviluppo di Laplace), formula con $n!$ addendi, eliminazione di Gauss.

65. Saper calcolare il determinante di una matrice 3x3 o 4x4.

66. Definizione di autovettori, autovalori e autospazio. Fattorizzazione VDV^{-1} di una matrice diagonalizzabile.

67. Definizione di molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore; saperle calcolare e saper enunciare le relazioni tra di esse.

68. Saper enunciare la relazione tra determinante o traccia di una matrice e suoi autovalori.

69. Saper calcolare autovalori e autovettori di una matrice.

70. Saper calcolare la matrice di proiezione ortogonale su un sottospazio V.

71. Definizione di matrice ortogonale; enunciato del teorema su autovalori, autovettori e diagonalizzabilità di una matrice simmetrica (teorema spettrale).